Configurations Géométriques

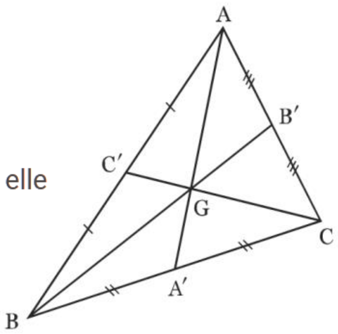
I) Théorèmes de la médiane

1. Rappels :

Définition

Dans un triangle, **la médiane issue d'un sommet** est la droite qui passe par ce sommet et par le milieu du côté opposé.

Théorème



- Les médianes d'un triangle sont concourantes (elles se coupent en un même point).
- Leur point d'intersection est le centre de gravité.
- Le centre de gravité est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet dont elle est issue.

Définition

On appelle **centre de gravité** d'un triangle ABC l'unique point G tel que $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{0}$.

2. Théorèmes :

Soit ABC un triangle. On note I le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$. Alors :

1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AI}^2-\dfrac{\mathrm{BC}^2}{4}$
2. $\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2=2\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$
3. $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{AI}^2+\dfrac{\mathrm{BC}^2}{2}$

Exercices n° **28, 29 et 73** p. 267 et 272.

II) Lieux géométriques

1. Définition :
Un lieu géométrique est un ensemble de points qui vérifient une condition particulière.

EXEMPLES

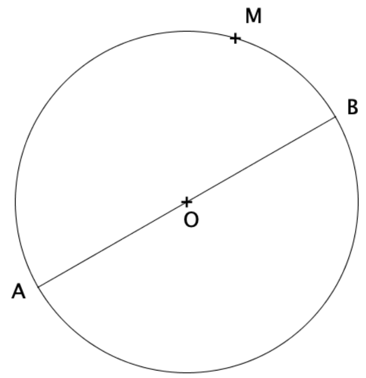
L'ensemble des points M qui vérifient :
- $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$.
- $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est la droite (AB) ou une partie de celle-ci, suivant les valeurs de k.
- $\Omega\mathrm{M}=r$ (avec $r>0$) est le cercle de centre Ω et de rayon r.

2. Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété 1 :

L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration au programme :

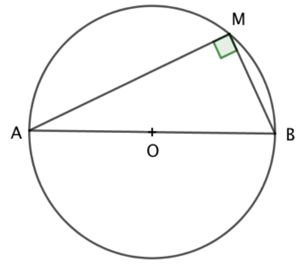


Soit O le milieu du segment [AB].
On a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$
Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$
Soit :
$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$

Soit : $MO^2 = OA^2$ soit encore $MO = OA$.
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété 2 : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Justification : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.



Exercices n° **83** p. 274 - PYTHON.

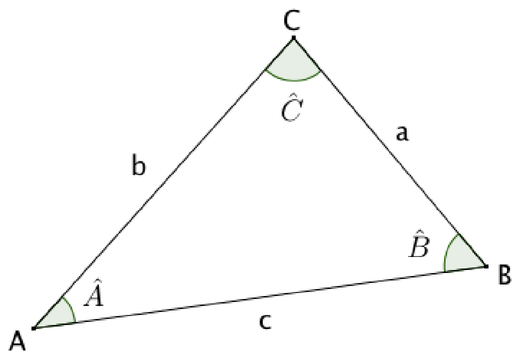
III) Théorème d'Al Kashi

Al-Kashi est un grand mathématicien et astronome perse qui a vécut de 1380 à 1429 principalement à Samarcande (situé aujourd'hui dans l'actuelle ville d'[Ouzbékistan]() - Patrimoine mondial de l'UNESCO).

Pour ceux qui sont passionné par l'Histoire vous pouvez visionner la vidéo : [Al Kashi, plus fort que Pythagore ?]()

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Remarque : si Â = $\frac{\pi}{2}$ on retrouve le théorème de PYTHAGORE.

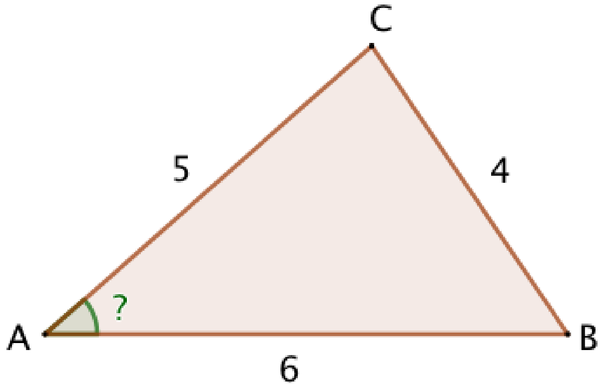
Démonstration au programme en vidéo : https://youtu.be/34OJiQ_4-N4

Sur le même principe que le théorème écrivez les 2 autres formules d'Al Kashi :

- Savoir appliquer le théorème d'Al Kashi :

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :



$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$
$16 = 36 + 25 - 60 \cos \widehat{BAC}$
$60 \cos \widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$
$60 \cos \widehat{BAC} = 45$
$\cos \widehat{BAC} = \frac{45}{60}$
$\cos \widehat{BAC} = \frac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$

Exercices corrigés en vidéo :

[Théorème d'Al-Kashi • Calcul de longueur • Un classique • Première spécialité mathématiques]